

## О ВЫВОДЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА

*В статье обсуждаются методы построения кинетического уравнения технологического процесса. Представлена модель взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием, положенная в основу вывода кинетического уравнения. Рассмотрены численные характеристики, описывающие состояние производственной линии.*

*Ключевые слова: кинетическое уравнение, производственная линия, массовое производство, незавершенное производство, балансовые уравнения, квазистатический процесс, стохастический процесс*

O.M.PIGNASTY

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

## DERIVATION OF KINETIC EQUATIONS OF THE PRODUCTION PROCESS

*The paper discusses methods of constructing the kinetic equation of the technology process. The article presents a model of the interaction of objects of labor with technological equipment, which is the basis for the derivation of the kinetic equation. To describe the state of the production line introduced numerical characteristics.*

*Keywords: kinetic equation, the production line, mass production, work in progress, balance equations, quasi-static process, stochastic process*

### Постановка проблемы и анализ последних публикаций

Моделирование сложных динамических производственных процессов является эффективным методом их исследования [1,2]. Один из распространенных классов образуют производственные системы, в которых характер наблюдаемых производственных процессов имеет стохастическую природу [2, 3, 4, 5, 6]. Закономерности, присущие равновесным состояниям в производственных системах во многом аналогичны тем, которые имеют место в физических (термодинамических) системах [7, 8]. Они оказались столь глубокими и полезными, что провозглашены для термодинамических и производственных систем в качестве неких общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса [9]. На основании данных принципов функционирование современного поточного производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [6,10]. Состояние производственного процесса определяется через состояния общего числа  $N$  предметов труда [6]. При переходе предмета труда из одного состояния в другое происходит превращение ресурсов (сырья, материалов, живого труда) в готовый продукт в результате целенаправленного воздействия оборудования. Состояние  $j$ -го предмета труда в фазовом пространстве будем описывать параметрами состояния

$\vec{S}_j = (S_{j,1}, S_{j,2}, \dots, S_{j,\alpha}, \dots, S_{j,A})$ ,  $\vec{\mu}_j = (\mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \dots, \mu_{j,\alpha}, \dots, \mu_{j,A})$ , где  $S_{j,\alpha}$  (грн) стоимость перенесенного  $\alpha$ -го технологического ресурса или его части на  $j$ -ый предмет труда,  $\mu_{j,\alpha}$  (грн/час) интенсивность переноса стоимости  $\alpha$ -го ресурса на  $j$ -ый предмет труда,  $0 < j \leq N$ ,  $0 < \alpha \leq A$  [6]. Состояние параметров производственного процесса в некоторый момент времени будет определено, если определены параметры состояния предметов труда  $\left( \vec{S}_1, \vec{\mu}_1, \dots, \vec{S}_N, \vec{\mu}_N \right)$  и целевая функция  $J\left( t, \vec{S}_j, \vec{\mu}_j \right)$  [11,

12], а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояний предметов труда [6,12]. Однако, если количество предметов труда  $N$  много больше единицы, то решить систему- из  $N$ -уравнений второго порядка практически невозможно [13, 14]. Последнее уточнение требует перехода от предметно-технологического описания (микроописания) к агрегированному потоковому (макроскопическому) описанию с элементами вероятностной природы. Основная трудность при таком описании состоит в том, чтобы выделить характеристики параметров состояний [15] предметов труда [1, 6], которые можно было бы измерить при исследовании реальных производственных процессов [12, 13]. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственного процесса с параметрами состояния предметов труда  $\left( \vec{S}_1, \vec{\mu}_1, \dots, \vec{S}_N, \vec{\mu}_N \right)$ , введем соответствующим образом нормированную дискретную фазовую функцию

распределения числа  $N$  предметов труда в фазовом пространстве  $(t, S, \mu)$  [6, 16]. Каждая точка в данном пространстве состояний [15,16,17] будет задавать состояние предмета труда. Разумно ожидать, что при больших  $N$  ( $N \approx 10^5$  шт. [18],  $N \approx 10^4$  шт. [13]) функцию будет хорошо аппроксимировать непрерывная фазовая функция распределения предметов труда  $\chi(t, \vec{S}, \vec{\mu})$  по состояниям [6, 16, 19, 20]. Если

производственная система выпускает  $K$  видов изделий [21,с.445],  $K=10$ , то потребуется получить функцию распределения для каждого  $k$ -ого вида  $\chi_k(t, S, \mu)$ , ( $k=1..K$ ). Перед рассмотрением многокоординатных (многоресурсных,  $0 < \alpha \leq A$ ) моделей производственного процесса, в межоперационных заделах которого находятся партии  $K$ -видов взаимодействующих друг с другом и с оборудованием изделий), исследуем закономерности обработки партий  $N$ -предметов труда одного вида, ( $N \gg 1$ ). Полагаем, что обработка происходит на последовательно расположенных  $M$  обобщенных операциях поточной линии (рис.1), ( $M \gg 1$ ) [23]. Полученные закономерности имеют общий характер как для однопоточных, так и для многопоточных линий с широким разнообразием ресурсов [10, 23].

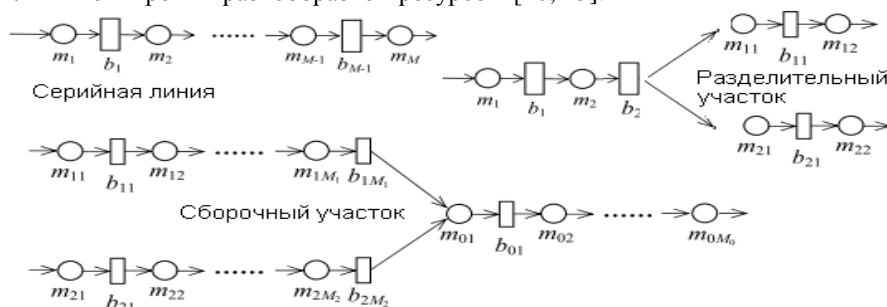


Рис. 1. Схемы потоков предметов труда ( $m$  - оборудование,  $b$  - буфер) [23]

### Построение кинетического уравнения производственной системы

Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки  $\Delta\Omega = \Delta S \cdot \Delta\mu$  содержали внутри себя большое число предметов труда (рис.2). Можно провести оценку количества изделий в ячейке  $\Delta\Omega = \Delta S \cdot \Delta\mu$ . Для процесса, состоящего из  $M \approx 100$  [13],  $M \approx 250$  [23, с.4589],  $M \approx 300$  [21, с.445] операций с количеством предметов труда в незавершенном производстве  $N \approx 10^5$  шт. [25],  $N \approx 10^4$  шт. [13],  $m$ -ая операция в заделе содержит усредненное количество предметов труда  $(N/M) \approx 10^3$  шт. Влияние количества операций  $M$  на точность расчетов исследовано в [6, с.23], где дан анализ результатов расчетов, полученных с помощью DES- и PDE-моделей для  $M = 50$  ( $N \approx 10^4$ ) операций, демонстрирующий удовлетворительную точность. Наряду с  $M = 50$  выполнен сравнительный анализ для  $M = 10$  операций. Показано, что данное количество может быть использовано для грубого приближения. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения параметров предметов труда, приближенно охарактеризуем состояние производственного процесса числом предметов труда в ячейках  $\Delta\Omega$  с координатами параметров предмета труда  $S_j \in [S, S + \Delta S]$ ,  $\mu_j \in [\mu, \mu + \Delta\mu]$ , (рис.2).

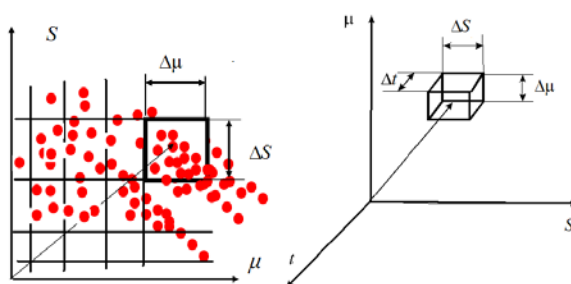


Рис. 2. Элементарная ячейка фазового технологического пространства

Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе столь же подробную информацию, что и точное. Для технологического процесса, состоящего из нескольких сотен операций разумно перейти к непрерывному описанию параметров, характеризующих операцию, рассматривая наряду с [23] основным пределом при  $N \rightarrow \infty$  и предельный случай  $M \gg 1$ . В силу того, что произведение  $\chi(t, S, \mu) \cdot d\Omega$  представляет собой число предметов труда в ячейке  $d\Omega$  фазового пространства с координатами  $S_j \in [S, S + dS]$ ,  $\mu_j \in [\mu, \mu + d\mu]$ , то интегрирование по объему  $\Omega$  фазового пространства  $(S, \mu)$  дает, общее количество  $N$  предметов труда, находящееся в незавершенном производстве [6, 19]:

$$\int_0^{S_d} \int_0^{\infty} \chi(t, S, \mu) d\mu dS = N, \quad \Omega = \int_0^{S_d} \int_0^{\infty} d\mu dS \quad (1)$$

где  $S_d$  (грн)- себестоимость изделия. Пределы интегрирования  $S = 0$  и  $S = S_d$  задают диапазон изменения координаты  $S$ ,  $S \in [0, S_d]$ , определяющей положение предмета труда вдоль технологического маршрута. Примем (1) в качестве условия нормирования для фазовой функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$  предметов труда по состояниям [6, 16, 19, 20], которое представляет закон сохранения количества изделий, находящихся в производственном процессе [6]. Введем числовые характеристики

$$\int_0^{\infty} \mu^k \cdot \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_k, \quad (2)$$

отражающие существенные черты распределения по состояниям находящихся в незавершенном производстве предметов труда. Характеристики (2) для функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$  определим как моменты  $k$ -го порядка, [20, с.906]. Часто удается решить задачу, оставляя в стороне законы распределения, оперируя при этом числовыми характеристиками. Числовые характеристики и связанный с ними метод моментов играют важную роль при построении многих статистических теорий динамических систем [6].

Существенное значение в моделях производственного процесса имеют нулевой  $[\chi]_0 = [\chi]_0(t, S)$  и первый  $[\chi]_1 = [\chi]_1(t, S)$  моменты функции распределения предметов труда по состояниям [19], определяющие плотность распределения предметов труда по позициям и темп обработки предметов труда на операциях [26, с.37]. Изменение функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$  предметов труда по состояниям обусловлено стохастическим характером взаимодействия предметов труда с оборудованием и между собой [23, с.4591]. Такое взаимодействие охарактеризуем функцией  $G(t, S, \mu)$

$$\frac{d\chi(t, S, \mu)}{dt} = G(t, S, \mu), \quad (3)$$

учитывающей пространственную схему расположения оборудования, законы воздействия оборудования на предмет труда с целью переноса ресурсов и механизмы взаимодействия предметов труда друг с другом. Взаимодействие предметов труда друг с другом определяется как приоритетами обработки (правила обработки FIFO, LIFO...), так и ограничениями на технологические режимы. Полная производная в (3) означает дифференцирование вдоль фазовой траектории предмета труда. Если движение предмета труда в пространстве состояний является детерминированным, задается уравнениями Эйлера для целевой функции производственной системы [11, 12], то уравнение (3) в силу теоремы Лиувилля превращается в тождество  $G(t, S, \mu) = 0$ . Запишем полную производную  $\chi(t, S, \mu)$  в виде

$$\frac{d\chi(t, S, \mu)}{dt} = \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} \quad (4)$$

и представим уравнение (3) следующим образом:

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} = G(t, S, \mu). \quad (5)$$

В уравнении (5)  $\mu$  есть усредненная интенсивность переноса ресурсов по всем предметам труда в ячейке  $d\Omega$  с координатами  $S_j \in [S, S + dS]$ ,  $\mu_j \in [\mu, \mu + d\mu]$  [6]. Подставим вместо  $\frac{d\mu}{dt}$  в (5) уравнение, задающее нормативную траекторию движения предмета труда в ячейке  $d\Omega$  [6,11,12, 16, 20],

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{[\chi]_{1_{\psi}}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right) + \frac{[\chi]_{1_{\psi}}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1_{\psi}}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right) = f(t, S), \quad \mu = \frac{dS}{dt}, \quad (6)$$

где  $[\chi]_{1_{\psi}}(t, S)$  – темп обработки предметов труда оборудованием в точке технологического маршрута с координатой  $S$ . Уравнение (6) связывает выпуск изделий в месте технологического маршрута, заданном координатой  $S$  с количеством необходимых затрат технологических ресурсов для преобразования предмета труда. Соотношение вида (6) обеспечивающее связь выпуска с затратами, может быть определено как производственная функция обобщенного оборудования, находящегося в указанном месте технологического маршрута. Кинетическое уравнение технологического процесса позволяет описать эволюцию перехода состояния производственного процесса к равновесному состоянию:

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot f(t, S) = G(t, S, \mu), \quad \chi(t, S, 0) = \chi(t, S, \infty) = 0. \quad (7)$$

Кинетическое уравнение вида (7) использовано в [26] (2003) при построении балансовых моделей поточных линий. Параллельно в США Ringhofer при исследовании производственных процессов компании "INTEL" получили кинетическое уравнение для квазистатичного описания поточной линии

$$\frac{\partial \chi(x, r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi(x, r, t)}{\partial x} = G(x, r, t), \quad (8)$$

где координаты фазового пространства  $x, r$  – степень незавершенности изготовления изделия (соответствует позиции) и эффективное время его обработки. Построение кинетических уравнений составляет одну из основных задач статистической теории систем управления производственными линиями [6,19,28]. Кинетическое уравнение (7), (8) принимает реальный смысл после установления вида функции  $G(t, S, \mu)$ . При движении предмета труда по технологическому маршруту оборудование оказывает воздействие на предмет труда, изменяя его качественно и количественно. Стохастический процесс воздействия со стороны оборудования на предмет труда описывается плотностью распределения  $\psi(t, S, \tilde{\mu}_\psi, \mu_\psi)$  случайной величины  $\mu_\psi$ , где  $\tilde{\mu}_\psi$  и  $\mu_\psi$  – интенсивность переноса ресурсов на предмет труда до и после воздействия [27]. Сечение случайного процесса для нормативной траектории, характеризующего интенсивность переноса ресурсов в момент времени  $t$  в точке технологического маршрута с координатой  $S$  представляет собой случайную величину [12]  $\mu_\psi$  с плотностью распределения  $\psi(t, S, \tilde{\mu}_\psi, \mu_\psi)$ . Вероятность того, что в результате воздействия оборудования на предмет труда значение  $\mu_\psi$  окажется в пределах  $(\mu_\psi; \mu_\psi + d\mu_\psi)$  есть величина  $\psi(t, S, \tilde{\mu}_\psi, \mu_\psi) d\mu_\psi$ , а полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty \psi(t, S, \tilde{\mu}_\psi, \mu_\psi) d\mu_\psi = 1. \quad (9)$$

Для нормативной технологической траектории, характеризующей изменение состояния предмета труда в результате обработки при переходе от одной обобщенной операции к другой, математическое ожидание интенсивности переноса ресурсов  $\langle \mu_\psi \rangle$  на предмет труда может быть вычислено:

$$\int_0^\infty \mu_\psi \cdot \psi(t, S, \tilde{\mu}_\psi, \mu_\psi) d\mu_\psi = \langle \mu_\psi \rangle. \quad (10)$$

Функция  $\psi(t, S, \tilde{\mu}_\psi, \mu_\psi)$  определяется из конструкторско-технологической документации или в результате экспериментального исследования [24] состояния предмета труда при переходе от одной операции к другой. На рис.3а для партии из 920 предметов труда в фазовом пространстве  $(x, r)$  изображены

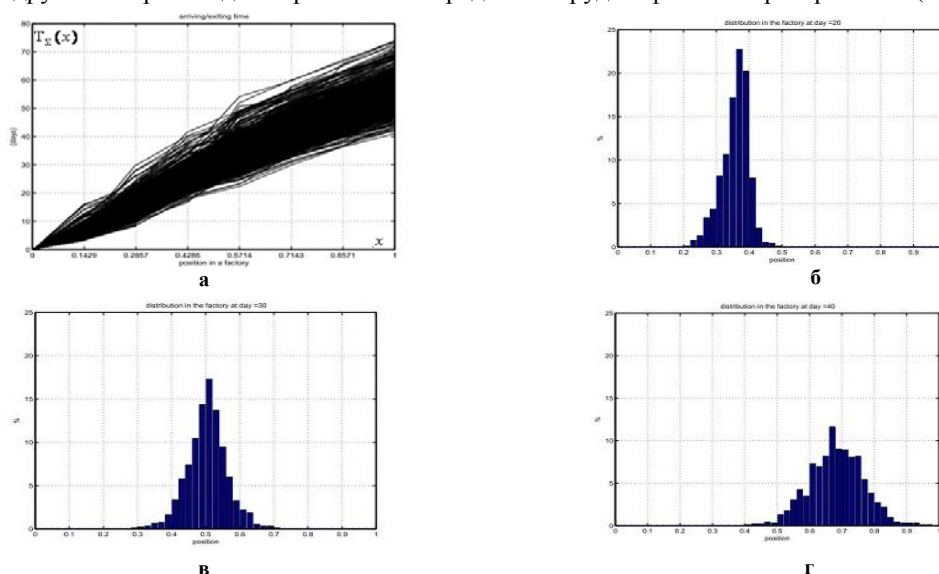


Рис. 3. Экспериментальные данные [24]: а–траектория  $T_\Sigma(x)$ ; б, в, г – гистограмма распределения предметов труда по позициям для  $t=20$ ;  $t=30$ ;  $t=40$ .

экспериментально технологические траектории  $T_{\Sigma}(x)$ , отображающие зависимость суммарного эффективного времени обработки предмета труда от места обработки в технологическом маршруте. На рис.3 представлены гистограммы распределения предметов труда по технологическим позициям для разных периодов времени ( $\delta - t=20$ ,  $\nu - t=30$ ,  $\gamma - t=40$ ) с момента начала обработки партии изделий. Замеры производились на поточной линии по производству полупроводниковой продукции компании “INTEL” [24] с целью изучения влияния колебаний длительности эффективного времени обработки на продолжительность производственного цикла. Данный экспериментальный материал является достаточным для построения табличной функции  $\psi(t, S, \tilde{\mu}_{\psi}, \mu_{\psi})$ , которая аппроксимирована гладкой непрерывной функцией. При ее построении рассматривается технологический процесс, состоящий из последовательности обобщенных операций. При проектировании поточных линий для обеспечения требуемой производительности используют последовательно-параллельное расположение обобщенных единиц оборудования (рис.1) [23]. Для учета количества обобщенного оборудования в пределах интервала обобщенной операции  $[S_{m-1}, S_m]$  введем понятие плотности размещения оборудования  $\lambda_{plant}(t, S)$  вдоль технологического маршрута  $[0, S_d]$ . Это обусловлено тем, что каждая обобщенная единица оборудования состоит из множества участков, модулей, узлов, подузлов и прочих отдельно представленных частей общего оборудования, распределенных вдоль траектории обработки предмета труда в пределах обобщенной траектории. Зависимость от  $t$  в функции  $\lambda_{plant}(t, S)$  предполагает возможность изменения количества оборудования за промежуток времени производственного цикла, например, за счет включения/выключения резервных единиц оборудования. Количество обобщенных единиц оборудования в момент времени  $t$  в пределах интервала обобщенной операции  $[S_{m-1}, S_m]$  (рис.4.) тогда может быть определено как

$$\frac{1}{N_m} \int_0^{\infty} \mu_{\psi} \psi(t, S, \tilde{\mu}_{\psi}, \mu_{\psi}) d\mu_{\psi} \quad (11)$$

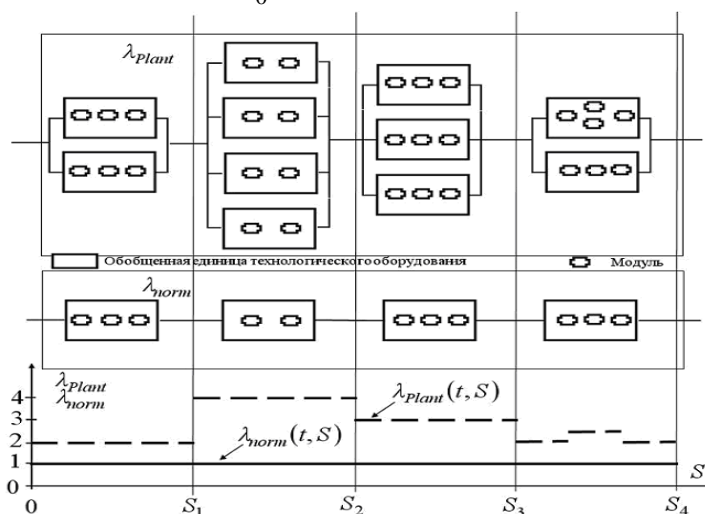


Рис. 4. Плотность расположения оборудования  $\lambda_{norm}(t, S)$ ,  $\lambda_{plant}(t, S)$ ,  $\Delta S_m = 1$ .

Если  $m$ -ой обобщенной операции соответствует только одна обобщенная единица оборудования то, соответственно интеграл (11) равен единице. Часто единицу обобщенного оборудования можно представить в виде последовательно расположенных модулей, каждый из которых в целях повышения производительности операции имеет возможность для дублирования. Пусть в пределах модуля выполняется

соотношение  $\int_{S_{b-1}}^{S_b} \lambda_{norm}(t, S) dS = P_{mB}$ ,  $[S_{b-1}, S_b] \in [S_{m-1}, S_m]$ ,  $\int_{S_{m-1}}^{S_m} \lambda_{norm}(t, S) dS = 1$ . Тогда для  $m$ -ой

обобщенной операции с дополнительным количеством  $n$ -модулей справедливо  $\int_{S_{m-1}}^{S_m} \lambda_{plant}(t, S) dS = 1 + n \cdot P_{mB}$

(рис.4), где  $\lambda_{plant}(t, S) dS$  – количество единиц обобщенного оборудования на отрезке  $[S, S + dS]$ . В единицу времени элемент объема  $\Delta \Omega = \Delta S \cdot \Delta \mu$ ,  $S \in [S, S + dS]$ ,  $\mu \in [\mu, \mu + d\mu]$  посетило в среднем

$\chi(t, S, \mu) \cdot \mu \cdot d\mu$  предметов труда, испытав при этом  $\{\lambda_{Plant}(t, S) \cdot dS\} \cdot \{\chi(t, S, \mu) \cdot \mu \cdot d\mu\}$  актов воздействия оборудования на предметы труда. Вероятность того, что в результате воздействия оборудования на предмет труда значение случайной величины  $\mu$  окажется в пределах  $(\tilde{\mu}; \tilde{\mu} + d\tilde{\mu})$  есть величина  $\varphi(t, S, \mu, \tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu}$ , а полная вероятность перехода в любое состояние.

$$\int_0^{\infty} \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\tilde{\mu} = 1. \quad (12)$$

Таким образом, число предметов труда, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявших значения случайной величины в пределах  $(\tilde{\mu}; \tilde{\mu} + d\tilde{\mu})$  есть произведение вероятности перехода  $\varphi(t, S, \mu, \tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu}$  на общее количество предметов труда  $\lambda_{Plant}(t, S) \cdot dS \cdot \chi(t, S, \mu) \cdot \mu \cdot d\mu$ , испытавших воздействие оборудования

$$\varphi(t, S, \mu, \tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu} \cdot \lambda_{Plant}(t, S) \cdot dS \cdot \chi(t, S, \mu) \cdot \mu \cdot d\mu. \quad (13)$$

Плотность распределения  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$  случайной величины  $\mu$  может быть выражена через плотность распределения  $\psi(t, S, \tilde{\mu}_{\psi}, \mu_{\psi})$  случайной величины  $\mu_{\psi}$ . При равномерном переносе ресурсов на все  $N_m$  предметов труда, находящихся в межоперационном заделе  $m$ -ой обобщенной операции, случайные величины  $\mu$  и  $\mu_{\psi}$  связаны функциональной зависимостью [28, с.783], [29, с.117], [29, с.821]:

$$\mu = \mu_{\psi} \cdot N_m^{-1}, \quad (14)$$

предполагающей линейный закон увеличения времени обработки партии предметов труда с увеличением размеров очереди  $N_m$ . Плотность распределения  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$  случайной величины  $\mu$  может быть представлена в виде:

$$\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) = N_m \cdot \psi(t, S, N_m \cdot \tilde{\mu}, N_m \cdot \mu). \quad (15)$$

Моменты случайной величины  $\mu$  запишем через моменты случайной величины  $\mu_{\psi}$ :

$$[\varphi]_0 = \int_0^{\infty} \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = [\psi]_0 = 1, \quad (16)$$

$$[\varphi]_1 = \int_0^{\infty} \mu \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = \frac{1}{N_m} \int_0^{\infty} \mu_{\psi} \psi(t, S, \tilde{\mu}_{\psi}, \mu_{\psi}) d\mu_{\psi} = \frac{[\psi]_1}{N_m} = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)}, \quad (17)$$

$$[\varphi]_2 = \int_0^{\infty} \mu^2 \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = \frac{[\psi]_2}{N_m^2} = \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right)^2 \left( 1 + \frac{\sigma_{\psi}^2}{\langle \mu_{\psi} \rangle^2} \right), \quad (18)$$

$$[\varphi]_k = \int_0^{\infty} \mu^k \cdot \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = \frac{[\psi]_k}{(N_m)^k}. \quad (19)$$

где  $\sigma_{\psi}$  – среднее квадратичное отклонение случайной величины  $\mu_{\psi}$ . Для многих практических случаев

$\frac{\sigma_{\psi}}{\langle \mu_{\psi} \rangle} \approx (0,05 \dots 0,1)$ , что позволяет приближенно записать

$$[\varphi]_2 \approx \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right)^2. \quad (20)$$

Наряду с убытием (13) предметов труда из элемента объема  $dS \cdot d\mu$  в элемент объема  $dS \cdot d\mu$  поступают предметы труда с объема  $dS \cdot d\tilde{\mu}$  в количестве:

$$\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \cdot d\mu \cdot \lambda_{Plant}(t, S) \cdot dS \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) \cdot \tilde{\mu} \cdot d\tilde{\mu}. \quad (21)$$

Произведя интегрирование разности (13) и (21) по всему диапазону значений  $\tilde{\mu}$ , получим изменение количества предметов труда в элементе объема  $dS \cdot d\mu$  в единицу времени

$$dS \cdot d\mu \cdot \lambda_{Plant}(t, S) \cdot \int_0^{\infty} \{\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) - \varphi(t, S, \mu, \tilde{\mu}) \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu)\} d\tilde{\mu}, \quad (22)$$

$$\text{откуда } \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = \lambda_{Plant} \cdot \int_0^{\infty} \{ \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) - \varphi(t, S, \mu, \tilde{\mu}) \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \} d\tilde{\mu}. \quad (23)$$

Для краткости записи использованы обозначения  $\chi = \chi(t, S, \mu)$ ,  $[\chi]_k = [\chi]_k(t, S)$ ,  $f = f(t, S)$ ,  $\lambda_{Plant} = \lambda_{Plant}(t, S)$ . Принимая во внимание (16), уравнение (23) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = G(t, S, \mu) = \lambda_{Plant} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} [\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu})] \cdot d\tilde{\mu} - \mu \cdot \chi \right\}. \quad (24)$$

Для многомерного описания уравнение (24) может быть записано как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \bar{S}, \bar{\mu}) + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{S}} \chi(t, \bar{S}, \bar{\mu}) + \bar{f}(t, \bar{S}) \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \chi(t, \bar{S}, \bar{\mu}) = \\ & = \lambda_{Plant}(t, \bar{S}) \left\{ \int_0^{\infty} [\varphi(t, \bar{S}, \tilde{\mu}, \bar{\mu}) \tilde{\mu} \chi(t, \bar{S}, \tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \bar{\mu} \chi(t, \bar{S}, \bar{\mu}) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

В большинстве интересных с практической точки зрения случаев плотность распределения  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$  не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования. Тогда интегрирование в правой части (24) приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = \lambda_{Plant} \cdot \{ \varphi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_I - \mu \cdot \chi \}. \quad (26)$$

#### Выводы

Интегро-дифференциальное уравнение (24), (26) есть кинетическое уравнение, описывающее обработку предметов труда при их движении по технологическому маршруту, впервые получено в [26]. В случае, когда интенсивность  $\mu$  является медленно меняющейся во времени,  $\mu = \mu_0 \cong \text{const}$ , (квазистатический процесс), кинетическое уравнение (24) приобретает вид:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu = \lambda_{Plant} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} [\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu})] \cdot d\tilde{\mu} - \mu \cdot \chi \right\}; \quad \frac{d\mu}{dt} = f(t, S) \cong 0, \quad (27)$$

который используется при описании квазистатических технологических процессов [19,28]. Из уравнения  $f(t, S) \cong 0$  (6) следует  $[\chi]_{I_{\psi}}(t, S) \cong \text{const} \cdot [\chi]_0(t, S)$ , что требует пропорционального соответствия производительности оборудования количеству предметов труда в его межоперационном накопителе, является трудно реализуемым в практических условиях, за исключением случая синхронизации оборудования  $\frac{\partial}{\partial S} [\chi]_{I_{\psi}}(t, S) \cong 0$ . Кинетическое уравнение в форме (27) может быть использовано для построения моделей синхронизированных поточных линий. Следует заметить, что уравнение

$$\frac{\partial \chi(x, r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi(x, r, t)}{\partial x} = T(t, r) \int_0^{\infty} [\omega(t, \tilde{r}) \cdot \chi(t, x, \tilde{r})] \cdot d\tilde{r} - \omega(t, r) \cdot \chi(x, r, t), \quad (28)$$

правая часть которого построена с использованием метода случайной фазы, получено в [27, с.788]. Построенные на его основе балансовые уравнения применены для исследования синхронизированных поточных линий по производству полупроводниковой продукции компании "INTEL". Здесь  $T(t, r)$  - плотность распределения случайной величины  $r$ ,  $\omega(t, r)$  - вспомогательная фазовая функция [27, с.785]. Правая часть кинетического уравнения (28) в [27, с.788] записана в общем виде, требует дальнейшего углубленного исследования влияния как особенностей технологии обработки, так схем расположения узлов и агрегатов внутри единицы обобщенного оборудования.

#### Список использованной литературы

1. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов / Н. П. Бусленко. – М.: Наука, 1964. – 363 с.
2. Bartholdi J. J. Deterministic chaos in a model of discrete manufacturing. / J. J. Bartholdi, D. D. Eisenstein, Y. F. Lim // Naval Research Logistics. – 2009. – N56(4). – P. 293 – 299.
3. Katzorke K. Chaos and complexity in simple models of production dynamics / K. Katzorke, A. Pikovsky // Discrete Dynamics in Nature and Society. – №5. – 2000. – P. 179– 187.

4. Mehdi J. Stochastic Models in Queuing Theory / J. Mehdi. – New York, 1991. – 482 p.
5. Riano G. Transient behavior of stochastic networks: Application to production planning with load-dependent lead times / G. Riano // – Atlanta, 2003. – 556 p.
6. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем / О. М. Пигнастый. – Харьков: ХНУ, 2007. – 388 с.
7. Hopp W.J. Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management. / W. J. Hopp, M.L. Spearman. – Boston: Irwin. McGraw-Hill, 2001. – P. 698.
8. Петров Б. Н. Теории моделей в процессах управления / Б. Н. Петров, Г. М. Уланов, И. И. Гольденблат, С. В. Ульянов – М.: Наука, 1978. – 224 с.
9. Eekelen J. Control of Manufacturing Systems Using State Feedback and Linear Programming / J.A. Eekelen, E. Lefeber, J.E. Rooda // 44th IEEE Conference on Decision and Control. – Sevilla. – 2005. – P. 4652-4657
10. Демуцкий В. П. Целевая функция производственной системы с массовым выпуском продукции. / В. П. Демуцкий, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Вісник Харківського національного університету. – Харьков: ХНУ. – 2006. – N746. – С. 95 – 103.
11. Пигнастый О. М. О построении целевой функции производственной системы / О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика". – 2007. – №5. – С. 50 – 55.
12. Lefeber E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems / E. Lefeber, R.A. Berg, J.E. Rooda // – Proceeding of the 2004 American Control Conference. – Massachusetts. – 2004. – P. 4583 – 4588.
13. Schmitz J. P. Chaos in Discrete Production Systems. / J. P. Schmitz, J.E. Rooda // – Journal of Manufacturing Systems. – 2002. – V.21. – №3. – P. 236 – 246.
14. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой. – М.: Наука, 1970. – 630 с.
15. Демуцкий В. П. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика". – 2005. – N7. – С. 66 – 71.
16. Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики / А. Я. Хинчин. – М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. – 128 с.
17. Ringhofer C. Traffic flow models and service rules for complex production systems / C. Ringhofer // Decision Policies for Production Networks. – 2012. – С. 209 – 233.
18. Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes / D. Armbruster., D. Marthaler, C. Ringhofer // Bulletin of the Institute of Mathematics. – Academica Sinica, – 2006. – P. 496 – 521.
19. Демуцкий В. П. Использование методов статистической физики для исследования экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В. П. Демуцкий, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Вісник Харківського національного університету. – Харьков: ХНУ. – 2005. – N710. – С. 128 – 134.
20. Armbruster D. A Continuum Model for a Re-entrant Factory / D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, Jo T.-C. // Operations research. – 2006. – VOL 54 – №5. – P. 933 - 950 .
21. Tian F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. / F. Tian, S.P. Willems, K.G. Kempf // International Journal of Production Economics. – 2011. – №133. – P. 439 – 450.
22. Zhang Liang. System-theoretic properties of Production Lines: A dissertation submitted the degree of Doctor of Philosophy / Zhang Liang. – Michigan, 2009. – 289 p.
23. Armbruster D. Continuous models for production flows.. / D. Armbruster, C. Ringhofer., Jo T.-J. // In Proceedings of the 2004 American Control Conference. – Boston, MA, USA. – 2004. – P. 4589 – 4594.
24. Scholz-Reiter B. Modelling and Control of Production Systems Based on Nonlinear Dynamics Theory / B. Scholz // Annals of the CIRP. – New York: Reiter. – 2002. – №1. – P. 375 – 378.
25. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems / R. Berg. – Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. – 157 p.
26. Демуцкий В. П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок / В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый. – Харьков.: ХНУ, 2003. – 272 с.
27. Armbruster D. Thermalized kinetic and fluid models for reentrant supply chains. / D. Armbruster, C. Ringhofer // SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation. – 2005. – N3(4). – P. 782 – 800.
28. Armbruster D. Continuous Dynamic Models, Clearing Functions, and Discrete-Event Simulation in Aggregate Production Planning. New Directions in Informatics, Optimization and Production / D. Armbruster, R. Uzsoy. – 2012. – P. 103 – 126.
29. Ambruster D. Continuous Dynamic Models, Clearing Functions, and Discrete-Event Simulation in Aggregate Production Planning. New Directions in Informatics, Optimization and Production / D. Armbruster, R. Uzsoy. – 2012. – P. 103 – 126.
30. Armbruster D. Modeling production planning and transient clearing functions, / D. Armbruster, J. Fonteinj, M. Wienke // Logistics Research. – 2012. – VOL 87 – №3. – P.815 – 822.